

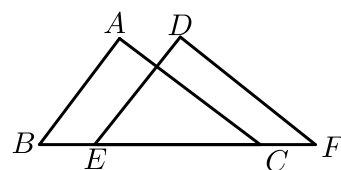
第2讲全等三角形的证明（练习）

一、变换型全等

1. 平移

练习

1. 如图 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中， $AB = DE$ ， $\angle B = \angle DEF$ ，添加下列哪一个条件无法证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ （ ）。



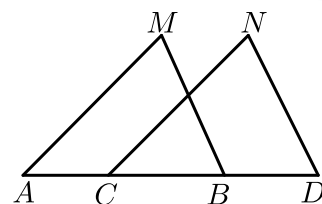
- A. $AC \parallel DF$ B. $\angle A = \angle D$ C. $AC = DF$ D. $\angle ACB = \angle F$

【答案】C

【解析】 $\because AB = DE$ ， $\angle B = \angle DEF$ ，
 $\therefore$ 添加 $AC \parallel DF$ ，
得出 $\angle ACB = \angle F$ ，
即可证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，
故A，D都正确，
当添加 $\angle A = \angle D$ 时，
根据ASA，也可证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，
故B正确，
但添加 $AC = DF$ 时，
没有SSA定理，
不能证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，
故C不正确。

【标注】【知识点】SSA反例

2. 如图，已知 $MB = ND$ ， $\angle MBA = \angle NDC$ ，下列哪个条件不能判定 $\triangle ABM \cong \triangle CDN$ （ ）。



- A. $\angle M = \angle N$ B. $AB = CD$ C. $AM \parallel CN$ D. $AM = CN$

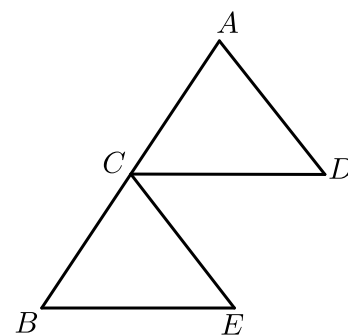
【答案】 D

【解析】 A、加上 $\angle M = \angle N$ 可利用ASA定理证明 $\triangle ABM \cong \triangle CDN$ ，故此选项不合题意．
 B、加上 $AB = CD$ 可利用SAS定理证明 $\triangle ABM \cong \triangle CDN$ ，故此选项不合题意．
 C、加上 $AM \parallel CN$ 可证明 $\angle A = \angle NCD$ ，可利用AAS定理证明 $\triangle ABM \cong \triangle CDN$ ，故此选项不合题意．
 D、加上 $AM = CN$ 不能证明 $\triangle ABM \cong \triangle CDN$ ，故此选项符合题意．

【标注】【知识点】多解或多种判定混合

练习

3. 如图，C是AB的中点， $\angle A = \angle BCE$ ，请添加一个条件，使 $\triangle ACD \cong \triangle CBE$ ，这个添加的条件可以是 _____．（只需写一个，不添加辅助线）



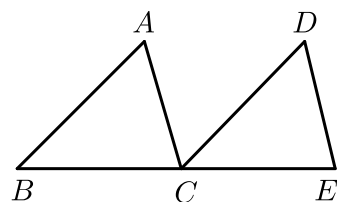
【答案】 $AD = CE$ 或 $\angle B = \angle ACD$ （答案不唯一）

【解析】 添加 $AD = CE$ 或 $\angle B = \angle ACD$ 后可分别根据SAS、ASA判定 $\triangle ACD \cong \triangle CBE$ ．
 故答案为： $AD = CE$ 或 $\angle B = \angle ACD$ ．（答案不唯一）

【标注】【知识点】多解或多种判定混合

4. 如图，已知 $AB = DC$ ， $\angle A = \angle D$ ，B、C、E三点共线，只要添加以下条件中的一个条件，就能证明 $\triangle ABC \cong \triangle DCE$ ，则这样的条件有（ ）．

- ① $AC = DE$; ② $BC = CE$; ③ $\angle B = \angle DCE$; ④ $\angle ACB = \angle DEC$; ⑤ $\angle ACE + \angle E = 180^\circ$; ⑥ $AC \parallel DE$; ⑦ $AB \parallel DC$; ⑧ C 是 BE 的中点 ;



A. 4个

B. 5个

C. 6个

D. 7个

【答案】 C

【解析】 ②和⑧不行 .

【标注】 【知识点】 平移型全等

练习

5. 如图 , $AB = DE$, $AC = DF$, $BE = CF$, B, E, C, F 四点依次在同一直线上 .

求证 : $\angle A = \angle D$.

分析 : 要证 $\angle A = \angle D$, 只要证 _____ $\cong$ _____ .

证明 : $\because BE = CF$ () ,

$\therefore BE + \underline{\hspace{1cm}} = CF + \underline{\hspace{1cm}}$,

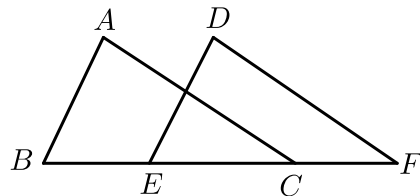
即 $BC = \underline{\hspace{1cm}}$,

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中 ,

$$\begin{cases} AB = \underline{\hspace{1cm}} \\ BC = \underline{\hspace{1cm}} , \\ AC = \underline{\hspace{1cm}} \end{cases}$$

$\therefore \underline{\hspace{1cm}} \cong \underline{\hspace{1cm}}$ () .

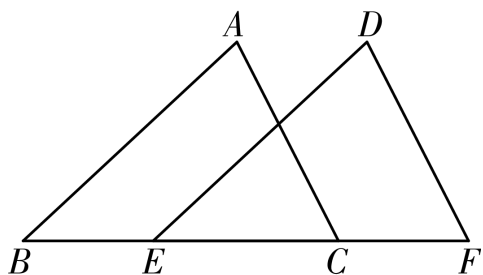
$\therefore \angle A = \angle D$ () .



【答案】 略 .

【标注】 【知识点】 SSS

6. 已知 : 点 B, E, C, F 在同一直线上 , $AB = DE$, $\angle A = \angle D$, $AC \parallel DF$.



(1) 求证： $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

(2) 求证： $BE = CF$.

【答案】 (1) 见解析

(2) 见解析

【解析】 (1) 证明： $\because AC \parallel DF$,

$$\therefore \angle ACB = \angle F .$$

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle ACB = \angle F \\ \angle A = \angle D \\ AB = DE \end{cases} ,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF (\text{AAS}) .$$

(2) 证明： $\because \triangle ABC \cong \triangle DEF$,

$$\therefore BC = EF ,$$

$$\therefore BC - EC = EF - EC ,$$

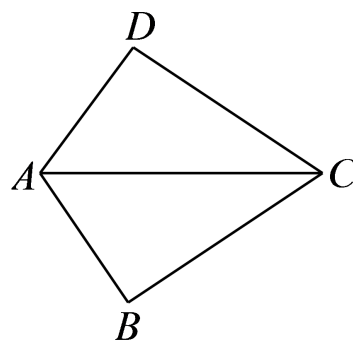
$$\text{即 } BE = CF .$$

【标注】【知识点】平移型全等

2. 对称

练习

7. 如图，已知 $AB = AD$ ，那么添加下列条件后，仍无法判定 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ 的是 () .



- A. $\angle BCA = \angle DCA$ B. $\angle BAC = \angle DAC$ C. $CB = CD$ D. $\angle B = \angle D = 90^\circ$

【答案】A

【解析】A. $AB = AD$, $AC = AC$, $\angle BCA = \angle DCA$, SSA不能判定全等, 故A错;

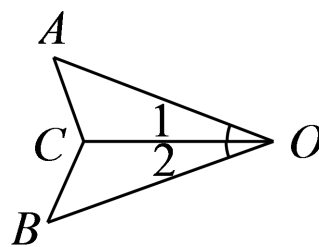
B. SAS能判定全等;

C. SSS能判定全等;

D. HL能判定全等.

【标注】【知识点】多解或多种判定混合

8. 如图, 在 $\triangle AOC$ 与 $\triangle BOC$ 中, $\angle 1 = \angle 2$, 当添加条件 _____ 时, 就可得到 $\triangle AOC \cong \triangle BOC$.
(只需要填写一个即可)



【答案】 $AO = BO$

【解析】理由是: 在 $\triangle AOC$ 和 $\triangle BOC$ 中,

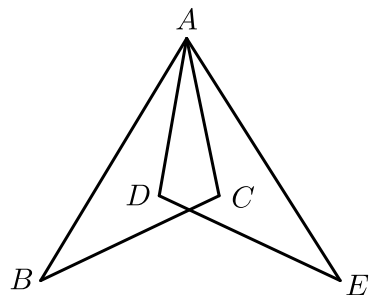
$$\begin{cases} AO = BO \\ \angle 1 = \angle 2 \\ OC = OC \end{cases},$$

$\therefore \triangle AOC \cong \triangle BOC$ (SAS).

【标注】【知识点】多解或多种判定混合; 对称型全等

练习

9. 如图，已知 $AB = AE$ ， $AC = AD$ ，下列条件中不能判定 $\triangle ABC \cong \triangle AED$ 的是（ ）。



- A. $\angle B = \angle E$ B. $\angle BAD = \angle EAC$ C. $\angle BAC = \angle EAD$ D. $BC = ED$

【答案】A

【解析】A 选项：SSA不能证明 $\triangle ABC \cong \triangle AED$ 。

B 选项：由 $\angle BAD = \angle EAC$ 得

$\angle BAC = \angle EAD$ ，

由SAS能证明 $\triangle ABC \cong \triangle AED$ 。

C 选项：由SAS能证明 $\triangle ABC \cong \triangle AED$ 。

D 选项：由SSS能证明 $\triangle ABC \cong \triangle AED$ 。

故选 A。

【标注】【知识点】SAS

10. 如图，已知 $\angle B = \angle C$ ， $AD = AE$ ，则 $AB = AC$ ，请说明理由（填空）

解：在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中，

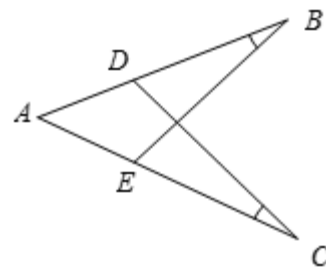
$\therefore \angle B = \angle C$ （已知）。

$\angle A = \angle$ _____ （ _____ ）。

$AE =$ _____ （已知）。

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD$ （ _____ ）。

$\therefore AB = AC$ （ _____ ）。



【答案】 A ; 公共角 ; AD ; AAS ; 全等三角形的对应边相等

【解析】 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle B = \angle C \text{ (已知)}, \\ \angle A = \angle A \text{ (公共角)}, \\ AE = AD \text{ (已知)}, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD (\text{AAS})$,

$\therefore AB = AC$ (全等三角形的对应边相等) .

【标注】 【知识点】 全等三角形证明过程的补全 ; 对称型全等

练习

11. 如图 , BC , AD 交于点 E , $CE = DE$, $EA = EB$, $CA = DB$.

求证 : $\triangle ABC \cong \triangle BAD$.

证明 : $\because CE = DE$, $EA = EB$,

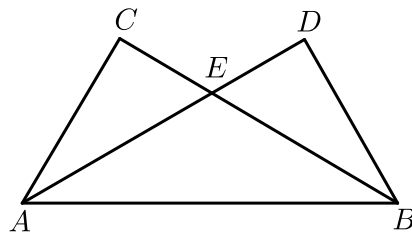
$\therefore$ _____ + _____ = _____ + _____ ,

即 _____ = _____ .

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BAD$ 中 ,

$$\begin{cases} \text{_____} = \text{_____} (\text{已知}) \\ \text{_____} = \text{_____} (\text{已证}) , \\ \text{_____} = \text{_____} () \end{cases}$$

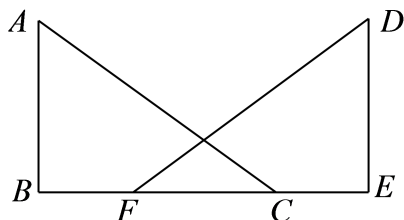
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle BAD$ () .



【答案】 略

【标注】【知识点】SSS

12. 如图所示, 点 B 、 F 、 C 、 E 在同一直线上, $AB \perp BE$, $DE \perp BE$, 连接 AC 、 DF , 且 $AC = DF$, $BF = CE$, 求证: $AB = DE$.



【答案】证明见解析.

【解析】 $\because BF = EC$,
 $\therefore BC = EF$,
 $\because AB \perp BE$, $DE \perp BE$,
 $\therefore \angle B = \angle E = 90^\circ$,
在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中,
$$\begin{cases} AC = DF \\ BC = EF \end{cases}$$
 $\therefore \text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle DEF (\text{HL})$,
 $\therefore AB = DE$.

【标注】【能力】推理论证能力

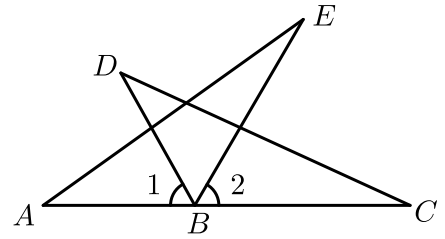
【知识点】全等三角形的性质

【知识点】HL

3. 旋转

|| 练习

13. 如图, A , B , C 三点共线, $AB = DB$, $\angle 1 = \angle 2$, 欲证 $\triangle ABE \cong \triangle DBC$, 则补充的条件中不正确的是().



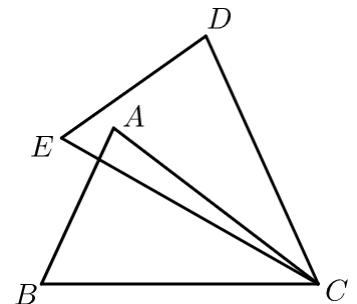
- A. $\angle A = \angle D$ B. $\angle E = \angle C$ C. $\angle A = \angle C$ D. $BC = BE$

【答案】C

【解析】 $\because \angle 1 = \angle 2, \therefore \angle 1 + \angle DBE = \angle 2 + \angle DBE, \therefore \angle ABE = \angle CBD, \because AB = DB,$
 $\angle A = \angle D$, 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DBC$ 中, $\begin{cases} \angle A = \angle D \\ AB = BD \\ \angle ABE = \angle CBD \end{cases}, \therefore \triangle ABE \cong \triangle DBC$ (ASA), A是可以证明 $\triangle ABE \cong \triangle DBC$, $\therefore \angle E = \angle C$, 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DBC$ 中,
 $\begin{cases} \angle E = \angle C \\ \angle ABE = \angle CBD \\ AB = DB \end{cases}, \therefore \triangle ABE \cong \triangle DBC$ (AAS), B是可以证明 $\triangle ABE \cong \triangle DBC$,
 $\therefore BC = BE$, 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DBC$ 中, $\begin{cases} BE = BC \\ \angle ABE = \angle CBD \\ AB = BD \end{cases}, \therefore \triangle ABE \cong \triangle DBC$ (SAS), D是可以证明 $\triangle ABE \cong \triangle DBC$.
 故选C.

【标注】【知识点】多解或多种判定混合

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 中, $AB = DE$. 若添加条件后使得 $\triangle ABC \cong \triangle DEC$, 则在下列条件中, 不能添加的是 ().



- A. $BC = EC, \angle B = \angle E$ B. $BC = EC, AC = DC$
 C. $\angle B = \angle E, \angle A = \angle D$ D. $BC = EC, \angle A = \angle D$

【答案】D

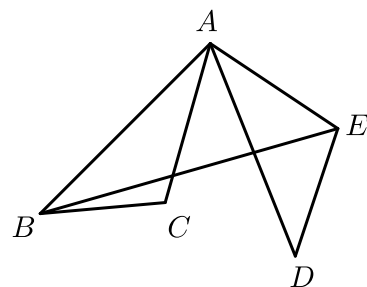
【解析】 $\because BC = EC, \angle B = \angle E, AB = DE, \therefore \triangle ABC \cong \triangle DEC$ (SAS), 故A错误;

$\because BC = EC, AC = DC, AB = DE, \therefore \triangle ABC \cong \triangle DEC (SSS)$, 故B错误;
 $\because \angle B = \angle E, AB = DE, \angle A = \angle D, \therefore \triangle ABC \cong \triangle DEC (ASA)$, 故C错误;
 $\because AB = DE, BC = EC, \angle A = \angle D, \therefore$ 无法用SSA证明全等, 故D正确.
 故选D.

【标注】【知识点】多解或多种判定混合

练习

15. 如图, $AB = AD, AC = AE, \angle BAD = \angle CAE$. 求证: $\triangle ABC \cong \triangle ADE$.



【答案】证明见解析.

【解析】 $\because \angle BAD = \angle CAE$,
 $\therefore \angle BAC = \angle DAE$,
 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中,

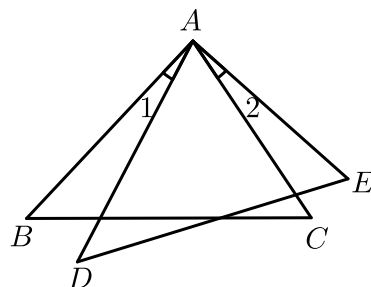
$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle BAC = \angle DAE \\ AC = AE \end{cases}$$
 $\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADE (SAS)$.

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】 SAS

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中, $AB = AD, \angle B = \angle D, \angle 1 = \angle 2$.

求证: $BC = DE$.



【答案】证明见解析 .

【解析】 $\because \angle 1 = \angle 2$,

$$\therefore \angle DAC + \angle 1 = \angle 2 + \angle DAC ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle DAE ,$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle B = \angle D \\ AB = AD \\ \angle BAC = \angle DAE \end{cases} ,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADE (\text{ASA}) ,$$

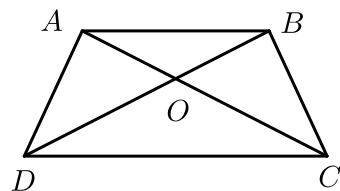
$$\therefore BC = DE .$$

【标注】【知识点】ASA

二、二次全等

练习

17. 已知 : 如图 , $AD = BC$, $AC = BD$, 求证 : $\triangle AOD \cong \triangle BOC$.



【答案】证明见解析 .

【解析】在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BCD$ 中 ,

$$\begin{cases} AD = BC \\ AC = BD , \\ DC = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle BCD (\text{SSS}) ,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle CBD ,$$

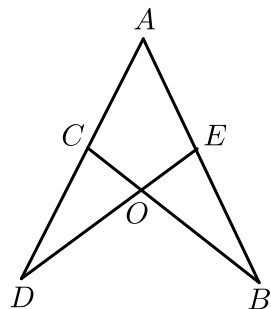
在 $\triangle DAO$ 和 $\triangle CBO$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle DAO = \angle CBO \\ \angle AOD = \angle BOC , \\ AD = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DAO \cong \triangle CBO (\text{AAS}) .$$

【标注】【知识点】全等三角形之二次全等

18. 如图，已知 $OC = OE$ ， $OD = OB$ ，试说明： $\triangle ADE \cong \triangle ABC$ 。



【答案】证明见解析。

【解析】在 $\triangle COD$ 和 $\triangle BOE$ 中，

$$\begin{cases} OC = OE \\ \angle COD = \angle EOB, \\ OD = OB \end{cases}$$

$\therefore \triangle COD \cong \triangle BOE (\text{SAS})$ ，

$\therefore \angle D = \angle B$ ，

$\because OC = OE$ ， $OD = OB$ ，

$\therefore DE = BC$ ，

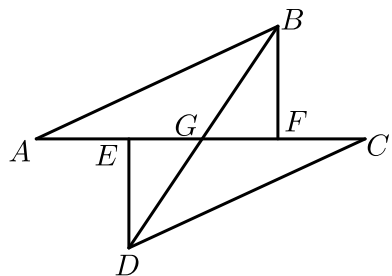
在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABC$ 中，

$$\begin{cases} \angle A = \angle A \\ \angle B = \angle D, \\ DE = BC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ABC (\text{AAS})$ 。

【标注】【知识点】AAS

19. 已知：如图，点 A 、 E 、 F 、 C 在同一直线上， $AE = CF$ ，过点 E 、 F 分别作 $DE \perp AC$ ， $BF \perp AC$ ，连接 AB 、 CD 、 BD ， BD 交 AC 于点 G ， $AB = CD$ ，求证： $\triangle DEG \cong \triangle BFG$ 。



【答案】证明见解析。

【解析】 $\because DE \perp AC, BF \perp AC,$

$$\therefore \angle AFB = \angle CED = 90^\circ,$$

$$\because AF = AE + EF, CE = CF + EF, AE = CF,$$

$$\therefore AF = CE,$$

$$\therefore AB = CD,$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CDE (\text{HL}),$$

$$\therefore BF = DE,$$

$$\therefore \angle AGD = \angle CGB,$$

$$\therefore \triangle DGE \cong \triangle BGF (\text{AAS}),$$

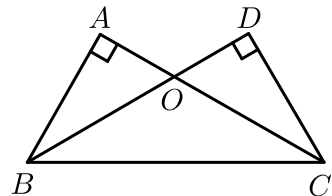
【标注】【知识点】AAS

【知识点】全等三角形的性质

【能力】推理论证能力

练习

20. 如图, $\angle A = \angle D = 90^\circ$, $AC = DB$, AC 、 DB 相交于点 O . 求证: $OB = OC$.



【答案】证明见解析.

【解析】在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle DCB$ 中,

$$\begin{cases} CB = BC \\ AC = DB \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle DCB (\text{HL}),$$

$$\therefore AB = CD,$$

在 $\triangle ABO$ 和 $\triangle DCO$ 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle D \\ \angle AOB = \angle DOC, \\ AB = DC \end{cases}$$

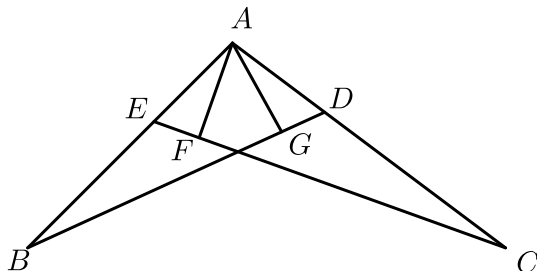
$$\therefore \triangle ABO \cong \triangle DCO (\text{AAS}),$$

$$\therefore OB = OC.$$

【标注】【知识点】HL

【知识点】全等三角形的对应边与角

21. 已知如图 $AB = AC$ ，点 D 、 E 分别在 AC 、 AB 上， $AG \perp BD$ ， $AF \perp CE$ ，垂足分别为 G 、 F ，且 $AG = AF$ ，求证： $AD = AE$ 。



【答案】证明见解析。

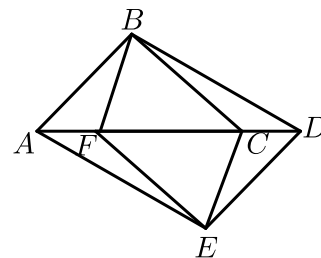
【解析】 $\because AG \perp BD$ ， $AF \perp CE$ ，
 $\therefore \triangle AGB$ 和 $\triangle AFC$ 是直角三角形，
 $\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle AGB$ 和 $\text{Rt}\triangle AFC$ 中，
$$\begin{cases} AB = AC \\ AG = AF \end{cases}$$

 $\therefore \text{Rt}\triangle AGB \cong \text{Rt}\triangle AFC (\text{HL})$ 。
 $\therefore \angle BAG = \angle CAF$ 。
又 $\because \angle BAG = \angle EAF + \angle FAG$ ，
 $\angle CAF = \angle DAG + \angle FAG$ ；
 $\therefore \angle EAF = \angle DAG$ 。
在 $\triangle AFE$ 和 $\triangle AGD$ 中，
$$\begin{cases} \angle AFE = \angle AGD \\ AF = AG \\ \angle EAF = \angle DAG \end{cases}$$

 $\therefore \triangle AFE \cong \triangle AGD (\text{ASA})$ 。
 $\therefore AD = AE$ 。

【标注】【知识点】全等三角形之二次全等

22. 如图，点 A 、 F 、 C 、 D 四点共线， $AB = DE$ ， $AF = DC$ ， $BF = EC$ ，求证： $BC \parallel EF$ 。



【答案】 证明见解析 .

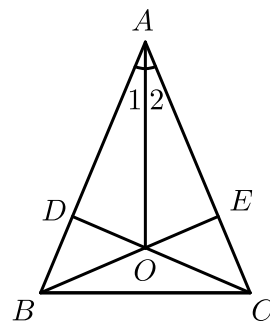
【解析】 ①在 $\triangle BAF$ 和 $\triangle EDC$ 中,
$$\begin{cases} AB = DE \\ AF = DC \\ BF = EC \end{cases}$$

 $\therefore \triangle BAF \cong \triangle EDC (SSS)$,
 ② $\because \triangle BAF \cong \triangle EDC$,
 $\therefore \angle ABF = \angle EDC$,
 $\therefore AF = DC$,
 $\therefore AF + CF = DC + CF$,
 即 $AC = DF$,
 在 $\triangle BAC$ 和 $\triangle EDF$ 中,
$$\begin{cases} AB = DE \\ \angle BAF = \angle EDC \\ AC = DF \end{cases}$$

 $\therefore \triangle BAC \cong \triangle EDF (SAS)$,
 $\therefore \angle ACB = \angle DFE$,
 $\therefore BC \parallel EF$.

【标注】 【知识点】 全等三角形之二次全等

23. 已知: 如图, $CD \perp AB$ 于点 D , $BE \perp AC$ 于点 E , CD 、 BE 交于点 O , $\angle 1 = \angle 2$. 求证:
 $OB = OC$.



【答案】 证明见解析 .

【解析】 $\because CD \perp AB$, $BE \perp AC$,

$$\therefore \angle ADO = \angle AEO = 90^\circ, \angle BDO = \angle CEO = 90^\circ,$$

在 $\triangle ADO$ 和 $\triangle AEO$ 中,

$$\begin{cases} \angle ADO = \angle AEO \\ \angle 1 = \angle 2 \\ AO = AO \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADO \cong \triangle AEO (\text{AAS}),$$

$$\therefore DO = EO,$$

在 $\triangle BDO$ 和 $\triangle CEO$ 中,

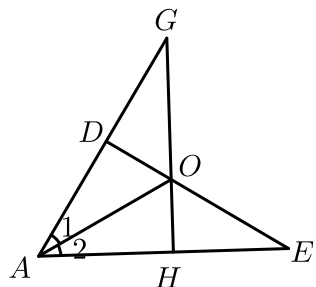
$$\begin{cases} \angle BDO = \angle CEO \\ DO = EO \\ \angle DOB = \angle EOC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BDO \cong \triangle CEO (\text{ASA}),$$

$$\therefore OB = OC.$$

【标注】【知识点】全等三角形之二次全等

24. 已知：如图， $OD \perp AD$ ， $OH \perp AE$ ， DE 交 GH 于 O 。



(1) 若 $\angle 1 = \angle 2$ ，求证： $OG = OE$ 。

(2) 若 $OG = OE$ ，求证： $\angle 1 = \angle 2$ 。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) 证明见解析。

【解析】(1) $\because OD \perp AD, OH \perp AE$,

$$\therefore \angle ADO = \angle ODG = 90^\circ,$$

$$\angle OHA = \angle OHE = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore OA \text{ 平分 } \angle DAH,$$

$$\therefore OD = OH,$$

在 $\triangle GDO$ 与 $\triangle EHO$ 中,

$$\begin{cases} \angle GDO = \angle EHO \\ DO = HO \\ \angle DOG = \angle HOE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle GDO \cong \triangle EHO (\text{ASA}),$$

$$\therefore OG = OE.$$

$$(2) \because OD \perp AD, OH \perp AE,$$

$$\therefore \angle ODG = \angle OHE = 90^\circ,$$

在 $\triangle DGO$ 与 $\triangle HEO$ 中,

$$\begin{cases} \angle GDO = \angle EHO \\ \angle DOG = \angle HOE \\ GO = EO \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DGO \cong \triangle HEO (\text{AAS}),$$

$$\therefore OD = OH,$$

在 $\text{Rt}\triangle ADO$ 与 $\text{Rt}\triangle AHO$ 中,

$$\begin{cases} DO = HO \\ AO = AO \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADO \cong \text{Rt}\triangle AHO (\text{HL}),$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2.$$

【标注】【知识点】全等三角形之二次全等